1 ЧЕТНОСТЬ

Рассмотрим произвольную перестановку:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\ 2 \ldots n \\ i_1, i_2, \ldots i_n \end{pmatrix}$$

ВОПРОС

Сколько в нижней строке пар элементов, стоящих в неправильном порядке (**инверсий**)?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Перестановка называется **четной**, если число инверсий четно, и — **нечетной**, если число инверсий нечетно.

Сегодня мы научимся определять четность перестановки и в итоге докажем следующее утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ

Четные и нечетные перестановки при композиции ведут себя так же как и четные и нечетные числа при сложении.

На математическом языке это означает, что таблица композиций четных и нечетных перестановок **гомоморфна** таблице сложения четных и нечетных чисел.

УМНОЖЕНИЕ НА ТРАНСПОЗИЦИЮ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Перестановка, в которой ровно два элемента меняются местами, а все остальные остаются на месте, называется **транспозицией**.

Разложением транспозиции в произведение независимых циклов является цикл длины 2.

ЗАДАЧА

Сколько существует транспозиций среди всех перестановок n элементов?

РЕШЕНИЕ

Мы можем выбрать один элемент транспозиции n способами, а второй n-1 способами, но при этом, чтобы избежать повторений, мы должны разделить результат на 2.
Таким образом, количество транспозиций равно

$$C_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

Умножим перестановку σ на произвольную транспозицию $(k\,l)$ и посмотрим, как при этом изменится ее четность.

При умножении справа поменяется местами пара элементов, в которые переходили k и l:

$$\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \ldots n \\ i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots i_n \end{pmatrix} (k\,l) = \begin{pmatrix} \text{остальное} & k & \text{на} & l & \text{месте} \\ & i_l & & i_k & \end{pmatrix}$$

При умножении слева поменяется местами пара элементов, которые сами переходили в k и l (т.е. i_k^{-1} и i_l^{-1}):

$$(k\,l)\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \ldots n \\ i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{остальное} & i^{-1}(k) & \text{на} & i^{-1}(l) & \text{месте} \\ & l & & k & \end{pmatrix}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ

Умножение на транспозицию меняет четность перестановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Если k и l находились в инверсии в перестановке σ (были переставлены), после умножения на $(k\,l)$ они встали на места; если они находились в правильном порядке, то оказались в инверсии.

При этом количество инверсий элементов, стоящих между k и l, после умножения на $(k\,l)$ либо увеличится на 2, либо уменьшится на 2, что не влияет на четность.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРАНСПОЗИЦИЙ

УТВЕРЖДЕНИЕ

Любую перестановку можно представить в виде произведения транспозиций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1-Й СПОСОБ.

Если $\sigma = Id$, можно считать, что она раскладывается в произведение 0 транспозиций.

Если $\sigma \neq Id$, то существует хотя бы одна инверсия, т.е. есть такое место в нижнем ряду, где подряд идут элементы k и l, причем $k > l$. Умножим σ на транспозицию $(k\,l)$. В результате элементы k и l переставятся, и число инверсий уменьшится ровно на одну.

Продолжаем эту процедуру, пока все элементы не встанут на свое место. В итоге получим:

$$\begin{pmatrix} 1\ 2 \ldots n \\ i_1\ i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}(k\,l)(..)\ldots(..) = Id \Rightarrow \begin{pmatrix} 1\ 2 \ldots n \\ i_1\ i_2 \ldots i_n \end{pmatrix} = (..)\ldots(..)(k\,l)$$

2-Й СПОСОБ.

Воспользуемся разложением перестановки в произведение независимых циклов и представим каждый из циклов в виде произведения транспозиций.

Например, вспомним перестановку из прошлого урока:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\ 3\ 4\ 7\ 8\ 6\ 2\ 1\ 5 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 7)(2\ 4\ 8\ 5\ 6)$$

Заметим, что:

$$(1\ 3\ 7) = (1\ 3)(3\ 7)$$
$$(2\ 4\ 8\ 5\ 6) = (2\ 4)(4\ 8)(8\ 5)(5\ 6),$$

Следовательно,

$$\sigma = (1\ 3)(3\ 7)(2\ 4)(4\ 8)(8\ 5)(5\ 6).$$

Любой цикл разбивается на произведение транспозиций, количество которых на 1 меньше его длины.

Цикл, как перестановка, является четным, если его длина нечетна и наоборот.

Замечаем, что так можно поступить с любой перестановкой. Если перестановка четная, то количество транспозиций будет четным.

3 УТВЕРЖДЕНИЕ О ЧЕТНОСТИ КОМПОЗИЦИИ

Мы фактически доказали утверждение о том, что композиция двух четных или двух нечетных перестановок четна, а композиция четной и нечетной — нечетна.
Сейчас мы сформулируем его на языке современной алгебры.

УТВЕРЖДЕНИЕ

Пусть Ψ — отображение множества всех перестановок на n символах (S_n) в множество из двух элементов «чет» и «нечет»:

$$\Psi : S_n \to \{ч, н\}$$

При этом на множестве S_n задана операция композиции $\circ$, а на множестве {ч, н} — операция сложения $\oplus$. Тогда:

$$\Psi(\sigma \circ \tau) = \Psi(\sigma) \oplus \Psi(\tau).$$

Мы убедились, что таблица композиций четных и нечетных перестановок и таблица сложения четных и нечетных чисел идентичны.

	ч	н
ч	ч	н
н	н	ч

Такое отображение Ψ одной группы в другую называется **гомоморфизмом**.

ЧЕТНОСТЬ ОБРАТНОЙ ПЕРЕСТАНОВКИ

Рассмотрим произвольную перестановку:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

ВОПРОС

Как связаны четности σ и обратной к ней (σ^{-1})?

Рассмотрим отображение $\Psi: S_n \to \{0, 1\}$ (можем заменить «чет» на 0, а «нечет» на 1). $\Psi(\sigma)$ — это четность перестановки σ. Если $\Psi(\sigma) = 0$, то σ четная, если $\Psi(\sigma) = 1$, то σ нечетная.

Применим свойство гомоморфизма Ψ для перестановок σ и σ^{-1}:

$$\Psi(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \Psi(\sigma) \oplus \Psi(\sigma^{-1})$$

Заметим, что в левой части стоит $\Psi(Id)$, а т.к. Id — четная перестановка, $\Psi(Id) = 0$.

Вообще любой гомоморфизм групп переводит нейтральный элемент в нейтральный.

Значит, композиция перестановок σ и σ^{-1} четна, т. е. они либо обе четные, либо обе нечетные.

Следовательно, все четные перестановки образуют подгруппу в группе S_n , так как:

1. композиция четных перестановок четна;
2. обратная к четной перестановке четна;
3. Id — четная перестановка.

А все нечетные перестановки не образуют подгруппу, т.к. композиция двух нечетных перестановок четна, и среди нечетных перестановок нет нейтрального элемента.

ПРИМЕР

$S_3 = \{Id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ —

группа перестановок на 3-х элементах.
В таблице композиций S_3 можно выделить подгруппу четных перестановок $\{Id, (123), (132)\}$:

<table>
<tr><th></th><th>Id</th><th>(123)</th><th>(132)</th><th>(12)</th><th>(13)</th><th>(23)</th></tr>
<tr><td>Id</td><td>Id</td><td>(123)</td><td>(132)</td><td rowspan="3" colspan="3">Только транспозиции (нечетные)</td></tr>
<tr><td>(123)</td><td>(123)</td><td>(132)</td><td>Id</td></tr>
<tr><td>(132)</td><td>(132)</td><td>Id</td><td>(123)</td></tr>
<tr><td>(12)</td><td rowspan="3" colspan="3">Только транспозиции (нечетные)</td><td rowspan="3" colspan="3">Только четные</td></tr>
<tr><td>(13)</td></tr>
<tr><td>(23)</td></tr>
</table>