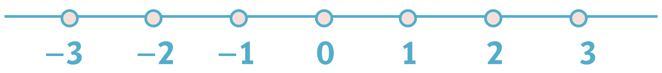
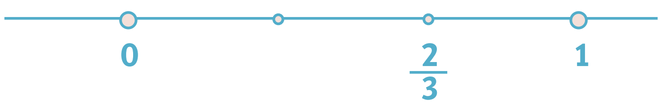
1 ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДРОБИ

Важный математический объект, с которым мы знакомимся в начальной школе — это **координатная прямая**. На ней находится **точка отсчета** — 0, и задан **масштаб** (промежуток между соседними натуральными числами или **единичный отрезок**). Слева от точки 0 через те же промежутки расположены **отрицательные** числа. Вместе с натуральными числами и нулем они образуют множество **целых** чисел.



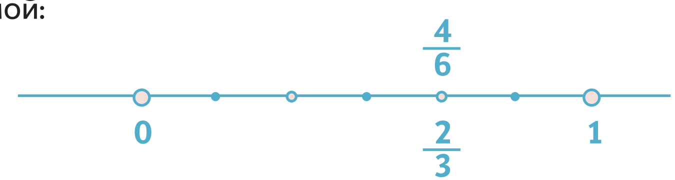
Чтобы найти положение на прямой дроби $\frac{2}{3}$, нужно разделить отрезок [0, 1] на три равные части и отсчитать от 0 две такие части.



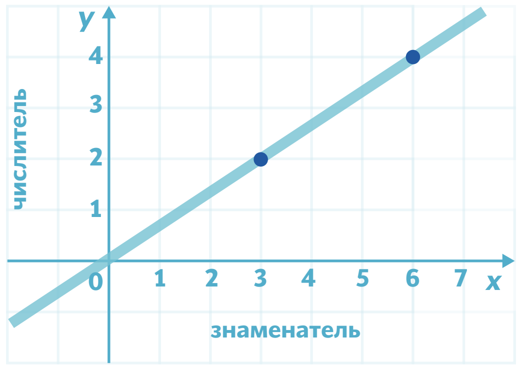
ВОПРОС: ПОЧЕМУ ДРОБИ МОЖНО СОКРАЩАТЬ?

Почему $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$?

С одной стороны, это одна и та же точка на координатной прямой:

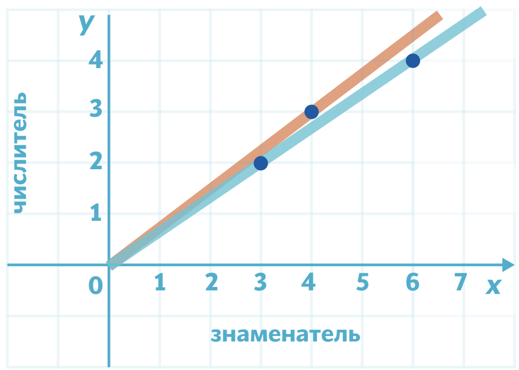


С другой стороны, дробь можно представить графически как наклон прямой (тангенс угла наклона):



Мы видим, что дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{6}$ лежат на одной прямой.

При помощи графического представления можно сравнивать дроби.



Мы видим, что прямая, проходящая через точку (3, 4), имеет больший наклон, чем проходящая через точку (2, 3), значит, $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

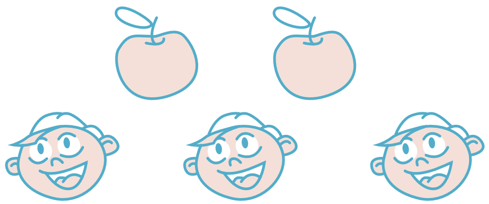
2 ДРУГИЕ СПОСОБЫ СРАВНЕНИЯ И ПОНИМАНИЯ ДРОБЕЙ

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ СПОСОБ

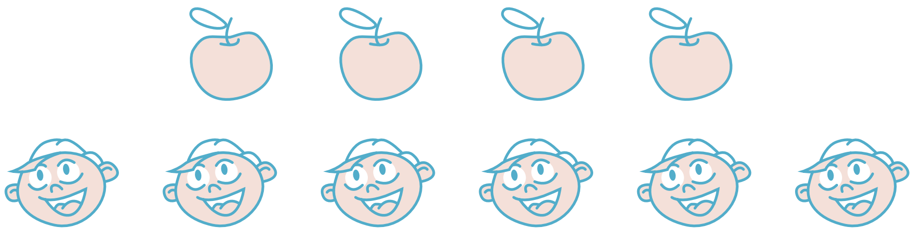
(приведение к общему знаменателю):

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} > \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Еще один наглядный способ:



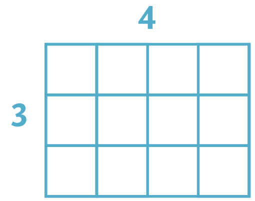
Если разделить поровну 2 яблока между 3-мя школьниками, то каждому достанется столько же, как если бы мы делили поровну 4 яблока между 6-ю школьниками.



ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ЧИСЕЛ

УТВЕРЖДЕНИЕ

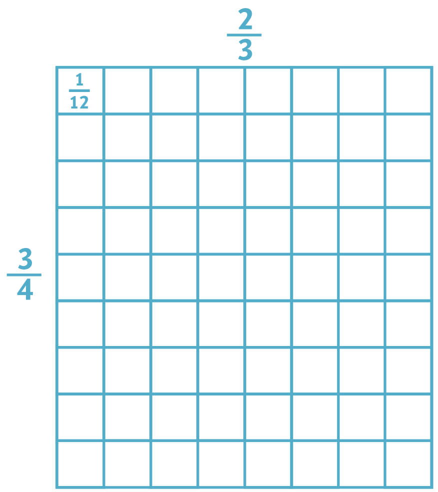
Произведение двух чисел a и b есть площадь прямоугольника со сторонами, равными a и b.



Для целых чисел a и b это очевидно. Покажем, что для дробей это тоже выполнено.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ и докажем, что его площадь равна $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

По свойству аддитивности площади площадь целого равна сумме площадей частей.



Разделим стороны прямоугольника на равные отрезки, длина которых целое число раз укладывается и в $\frac{2}{3}$, и в $\frac{3}{4}$. Отрезок длины $\frac{1}{12}$ укладывается 8 раз в отрезке длины $\frac{2}{3}$ и 9 раз в отрезке длины $\frac{3}{4}$.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

Получаем, что площадь нашего прямоугольника равна $8 \cdot 9 = 72$ площадям маленького квадрата со стороной $\frac{1}{12}$.
Какова же площадь маленького квадрата?

Если поместить наш прямоугольник в квадрат со стороной, равной 1, то таких квадратиков поместится в нем 12 по горизонтали и 12 по вертикали, всего 144. Так как площадь квадрата со стороной 1 равна 1, площадь маленького квадрата со стороной $\frac{1}{12}$ равна $\frac{1}{144}$.

Тогда площадь нашего прямоугольника равна:

$$S = 72 \cdot \frac{1}{144} = \frac{72}{144} = \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

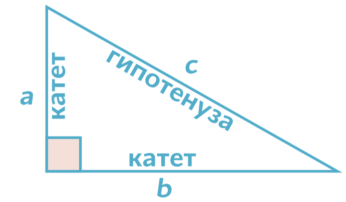
Далее в нашем курсе мы убедимся, что данное утверждение верно не только для целых и дробных чисел, но и для любых a и b.

При помощи этого утверждения мы можем доказать некоторые замечательные теоремы начальной математики. Например, **теорему Пифагора**.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

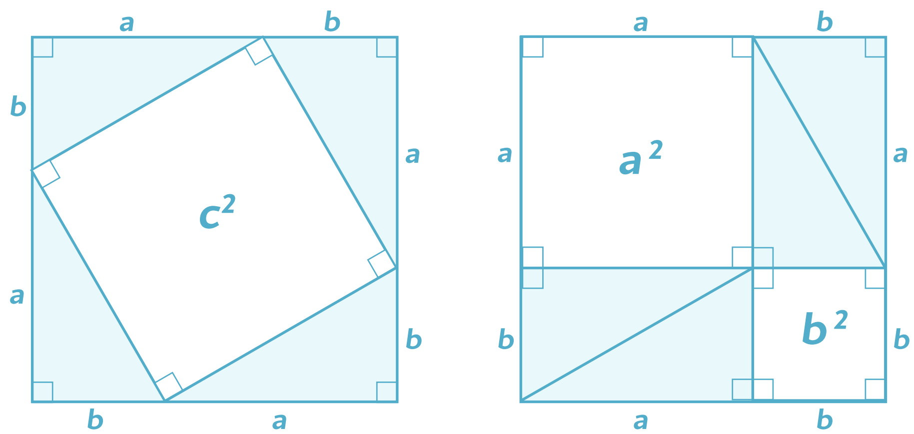
Пифагор (VI в до н.э.) установил, что в произвольном прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c выполнено соотношение:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Проведем доказательство геометрическим способом. Начертим два квадрата со стороной, равной $a + b$. Вырежем из первого квадрата 4 наших прямоугольных треугольника, а из второго — квадрат со стороной a и квадрат со стороной b, как показано на рисунке.



Внутри левого квадрата получился квадрат со стороной c (все его углы прямые, т.к. дополняют до 180^0 сумму острых углов прямоугольных треугольников, которая равна $180^0 - 90^0 = 90^0$).

В итоге левый квадрат составлен из 4-х прямоугольных треугольников, равных нашему, и квадрата площади c^2, а правый — из 4-х таких же прямоугольных треугольников и двух квадратов площадей a^2 и b^2.
Так как исходные квадраты равны, заключаем, что:

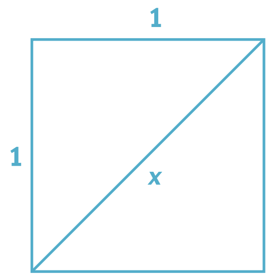
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ.

ДЛИНА ДИАГОНАЛИ КВАДРАТА

С помощью теоремы Пифагора можно найти длину диагонали квадрата со стороной 1:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{2}$$



В дальнейшем в нашем курсе мы убедимся, что число $\sqrt{2}$ не является дробью. Для этого нам потребуется понятие о соизмеримости и несоизмеримости отрезков, с которым мы познакомимся на следующем уроке.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов