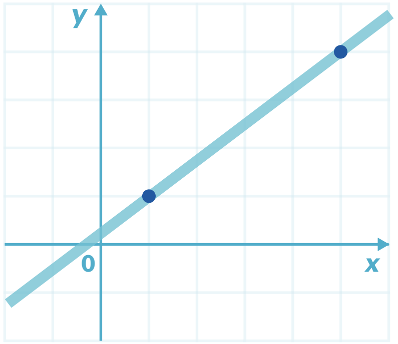
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дано линейное уравнение:
$ax + by + c = 0$, где a, b, c — целые числа.

Требуется найти все **целочисленные** пары (x, y), которые являются решениями этого уравнения.

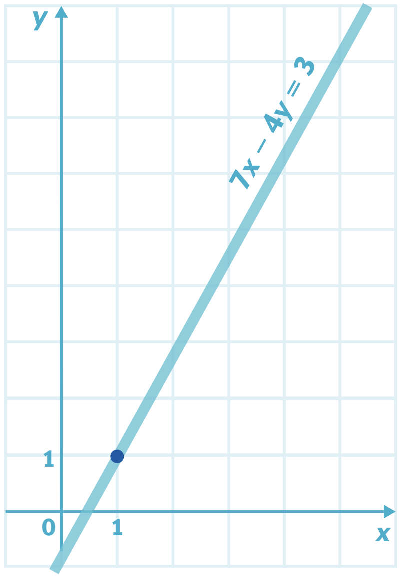


Уравнение $ax + by + c = 0$ задает на координатной плоскости **прямую линию**. Нам нужно найти все точки с целочисленными координатами, через которые она пройдет.

ПРИМЕР

$7x - 4y = 3$

Точка (1, 1) является решением задачи.
Пусть (x, y) — решение,
а (x_0, y_0) — другое решение.
Тогда:
$7x - 4y = 3$
$7x_0 - 4y_0 = 3$.
Вычтем из первого уравнения второе:
$7(x - x_0) - 4(y - y_0) = 0$
Уравнение такого вида (при $c = 0$) называется **линейным однородным**.



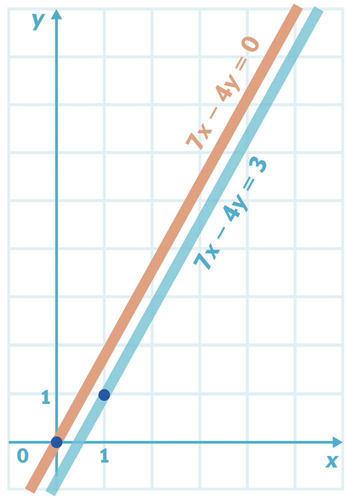
Рецепт решения $ax + by + c = 0$ в целых числах:

1. Найти все целочисленные решения однородного уравнения $ax + by = 0$;
2. Найти **одно** целочисленное решение исходного уравнения;
3. Сложить **общее** решение однородного уравнение с **частным** решением исходного уравнения.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Нашему уравнению $7x - 4y = 3$ соответствует однородное уравнение $7x = 4y$.

График этой прямой очевидно пройдет через точку (0, 0). Заметим также, что эта прямая будет параллельна исходной, т.к. не существует таких (x, y), чтобы одновременно было выполнено $7x - 4y = 3$ и $7x - 4y = 0$.



Найдем общее решение уравнения $7x = 4y$ в целых числах. Чтобы решение было целым, $7x$ должно делиться на 4. Так как $\text{НОД}(7, 4) = 1$, по доказанной на прошлом уроке лемме, x должно делиться на 4. Аналогично, y должно делиться на 7.
Пусть $x = 4t$, $y = 7s$, где t, s — целые числа.
Подставляем в уравнение:
$7 \cdot 4t = 4 \cdot 7s \Rightarrow 28t = 28s \Rightarrow t = s$. Таким образом,

Общее решение однородного уравнения $7x = 4y$:
$x = 4t$, $y = 7t$, где t — произвольное целое число.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

2 РЕШЕНИЕ ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Вернемся к исходному (неоднородному) уравнению

$$7x - 4y = 3.$$

(1, 1) — одно из его решений, мы его угадали.

Запишем:

$7 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 3$ и вычтем из нашего уравнения:

$$7(x - 1) - 4(y - 1) = 0.$$

Мы получили однородное уравнение относительно новых переменных $x - 1$ и $y - 1$, общим решением которого будет:

$x - 1 = 4t$, $y - 1 = 7t$, где t — любое целое.

> Следовательно, общим решением уравнения
>
> $$7x - 4y = 3$$
>
> будет:
>
> $x = 1 + 4t$, $y = 1 + 7t$, где t — любое целое.

МЕТОД ОТЫСКАНИЯ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ

Что делать если решения не удается угадать?

Продолжаем работать с нашим примером:

$$7x - 4y = 3.$$

НОД(7, 4) = 1 $\Rightarrow$ существуют такие x_0, y_0, что

$$7x_0 - 4y_0 = 1.$$

Применяем алгоритм Евклида отыскания НОД(7, 4):

$$7 = 4 \cdot 1 + 3$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0.$$

Выразим $1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 7 \cdot (-1) - (-4) \cdot 2.$

Тем самым, мы нашли $x_0 = -1$, $y_0 = -2$, что

$$7x_0 - 4y_0 = 1.$$

Чтобы найти решение $7x - 4y = 3$, нужно умножить x_0, y_0 на 3. Получим: $x^* = -3$, $y^* = -6$.

> Заметим, что мы получили другое решение, отличное от (1, 1).

Можем для (−3, −6) записать:

$$7(x + 3) - 4(y + 6) = 0 \Rightarrow$$

$x = -3 + 4t$, $y = -6 + 7t$, где t — любое целое.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

3 РЕШЕНИЕ ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Запишем оба варианта решения:

частное: (1, 1) (−3, −6)

общее: $x = 1 + 4t,$ $x = -3 + 4t,$

$y = 1 + 7t$ $y = -6 + 7t$

ВОПРОС:
почему для одного уравнения мы получили два вида решения?

ОТВЕТ:
при $t = 0$ первый вариант дает ту же пару (x, y),
что второй вариант при $t = 1$
(это сдвиг параметризации).
При этом множества решений одинаковы.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ $ax + by = c$

1 ▶ Заметим, что c должно делиться на $НОД(a, b)$, иначе левая часть будет делиться на какое-то число, а правая — нет (это невозможно).

2 ▶ Поделим уравнение на $НОД(a, b)$ (при этом уравнение будет иметь те же решения):

$$\tilde{a}x + \tilde{b}y = \tilde{c}.$$

Т.к. $НОД(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1$, существуют такие x_0, y_0, что

$$\tilde{a}x_0 + \tilde{b}y_0 = 1.$$

Домножим это уравнение на $\tilde{c}$:

$$\tilde{a}\tilde{c}x_0 + \tilde{b}\tilde{c}y_0 = \tilde{c}$$

Получаем, что (cx_0, cy_0) является частным решением уравнения

$$\tilde{a}x + \tilde{b}y = \tilde{c},$$

А значит, и исходного уравнения

$$ax + by = c.$$

3 ▶ Получаем, что $x^* = \tilde{c}x_0$, $y^* = \tilde{c}y_0$.
Пусть (x, y) — любое решение нашего уравнения.
Запишем:

$$\tilde{a}x + \tilde{b}y = \tilde{c},$$
$$\tilde{a}x^* + \tilde{b}y^* = \tilde{c}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\tilde{a}(x - x^*) + \tilde{b}(y - y^*) = 0$$

Мы получили однородное уравнение.
Найдем его общее решение.

$$НОД(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1 \Rightarrow (x - x) \vdots \tilde{b},\ (y - y^*) \vdots \tilde{a} \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x + x^* &= \tilde{b}t \\ y + y^* &= -\tilde{a}t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$x = x^* + \tilde{b}t$

$x = x^* - \tilde{a}t$, где t — произвольное целое число.

ПОДВОДИМ ИТОГ

Линейное уравнение $ax + by = c$ либо не имеет решений в целых числах, если $c \not\vdots НОД(a, b)$, либо имеет бесконечную серию решений

$x = x^* + \tilde{b}t$

$x = x^* - \tilde{a}t$, где t — произвольное целое число,

$x^* = \tilde{c}x_0$, $y^* = \tilde{c}y_0$, (x_0, y_0) — частное решение уравнения

$$\tilde{a}x_0 + \tilde{b}y_0 = 1,$$

$\tilde{a} = a : НОД(a, b)$, $\tilde{b} = b : НОД(a, b)$, $\tilde{c} = c : НОД(a, b)$.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов