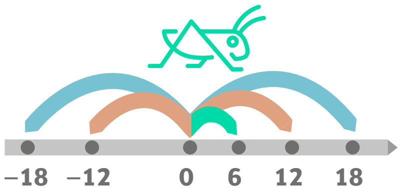
КУЗНЕЧИК ВИДА [a, b]

ПРИМЕР 1

$a = 12$, $b = 18$.



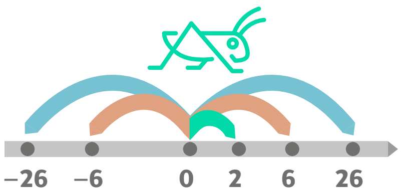
Этот кузнечик попадает в точку 6 (1 прыжок направо на 18 и 1 прыжок налево на 12).
Он может попасть только в кратные 6 точки, т.к. любой его прыжок кратен 6.
Заметим, что 6 = НОД (12, 18).

ГИПОТЕЗА

Кузнечик вида [a, b] попадает только в точки, кратные НОД (a, b).

ПРИМЕР 2

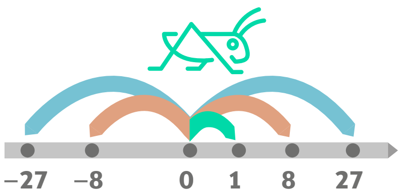
$a = 6$, $b = 26$.



Этот кузнечик попадает в точку 2 (1 прыжок направо на 26 и 41 прыжка налево на 6).
Такой кузнечик может попасть только в четные точки, т.к. все его прыжки из точки 2 могут быть только четными.
2 = НОД (6, 26), значит, наша гипотеза подтверждается.

ПРИМЕР 3

$a = 8$, $b = 27$.



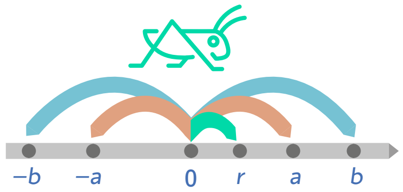
Этот кузнечик попадает в точку 1 (3 прыжка направо на 27 и 10 прыжков налево на 8).
Тем самым подтверждая нашу гипотезу, т.к. НОД(8, 27) = 1.

ТЕОРЕМА О КУЗНЕЧИКЕ

ТЕОРЕМА

Кузнечик вида [a, b] может попасть только в точки, кратные НОД (a, b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Пусть r — ближайшая к 0 точка, куда может попасть кузнечик.
Тогда a и b должны делиться на r, иначе остаток от их деления на r был бы ближайшей к 0 точкой, куда может попасть кузнечик.
Таким образом, r — общий делитель чисел a и b.
Докажем, что r = НОД (a, b), а также, что r делится на любой общий делитель a и b.
Пусть x и y — такие числа, что следующая комбинация приводит кузнечика в точку r:

$$r = a \cdot x + b \cdot y$$

Если s — любой другой общий делитель a и b, то r делится на s, т.к. является суммой кратных s чисел.
Таким образом, r = НОД (a, b) и кратно всем другим общим делителям.

Теорема о кузнечике означает, что любая линейная комбинация двух чисел пропорциональна их НОД.

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов

2 ВАЖНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ О ДЕЛИМОСТИ

ЛЕММА

Пусть $ab \vdots c$, НОД $(a, c) = 1$. Тогда $b \vdots c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1

НОД $(a, c) = 1 \Rightarrow$ существуют такие x и y, что

$$a \cdot x + c \cdot y = 1.$$

Умножим это выражение на b:

$$\underbrace{ab \cdot x}_{\vdots c} + \underbrace{bc \cdot y}_{\vdots c} = b \Rightarrow b \vdots c$$

ЛЕММА ДОКАЗАНА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2

По основной теореме арифметики:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \qquad c = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s}$$

где все p_i и q_j — различные простые числа.
По условию:

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \cdot b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s} \cdot d$$

для некоторого d.
По основной теореме арифметики разложение для $a \cdot b$ единственно.

Но ни один из сомножителей в $q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s}$

не попадает в произведение $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$
$\Rightarrow$ все они должны содержаться в b
$\Rightarrow$ $b \vdots c$.

ЛЕММА ДОКАЗАНА

РЕШЕНИЕ СТЕПЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Пусть $a_1, a_2, \ldots a_k$ — целые положительные числа, попарно взаимно простые (для любых i, j НОД$(a_i, a_j) = 1$).

ДАНО

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = b^r$$

Тогда для любого i $a_i = b_i^r$, где b_i — некоторые целые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $c = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\alpha_s}$

Тогда $b^r = q_1^{\alpha_1 r} \cdot q_2^{\alpha_2 r} \cdot \ldots \cdot q_s^{\alpha_s r}$

Но $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = b^r$, а значит, по основной теореме арифметики два разложения совпадают.
Т.к. все a_i попарно взаимно простые, в разложениях каждого из них содержатся уникальные простые множители.

Значит, каждый из блоков $q_j^{\alpha_j r}$ целиком попадает в разложение какого-то из a_i.
В то же время, разложения для a_i не могут содержать ничего, кроме таких блоков. Следовательно, все степени простых множителей в разложениях a_i кратны r.
$\Rightarrow$ существуют такие целые числа b_i, что

$$a_i = b_i^r.$$

ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ДОКАЗАТЬ

Проект реализуется при поддержке Фонда президентских грантов